

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА К МОДУЛЮ №1

Вариант № 1

1. Вычислите пределы:

$$a) \lim_{y \rightarrow a} \left(\sin \frac{y-a}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi y}{2a} \right);$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\operatorname{arctg} x};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x + 2} \right)^x;$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1};$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(x-2)}{\cos x - \cos 3}.$$

2. Исследуйте функцию на непрерывность, установите характер точек разрыва и постройте график:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{при } x < 0, \\ x & \text{при } 0 \leq x < 2, \\ 2 & \text{при } 2 \leq x < 5, \\ \sin(x-5) & \text{при } x > 5. \end{cases}$$

3. Найти (описать, изобразить) область определения данной функции

$$z = \sqrt{y^2 - 1} + \sqrt{1 - x^2}.$$

4. Вычислить предел.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{5 \sin^3 x - \sin y^2}{\sqrt{25 + \sin y^2} - 5 \sin^3 x - 5}.$$

Вариант № 2

1. Вычислите пределы:

$$a) \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x^5 - 5}{x - e};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{\sin bx} \right)^a;$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{1+5x} - 4}{\sqrt{x+1} - 2};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-7}{5+3x} \right)^{2x+1};$$

$$e) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2^x - 2^{\frac{\pi}{2}}}{\cos 3x - \cos 5x}.$$

2. Исследуйте функцию на непрерывность, установите характер точек разрыва и постройте график:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{при } |x| \geq 5, \\ \ln(x+5) & \text{при } |x| < 5. \end{cases}$$

3. Найти (описать, изобразить) область определения данной функции

$$z = \sqrt{(x^2 + y^2 - 4)(9 - x^2 - y^2)}.$$

4. Вычислить предел.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(x^2 + y^2)x^2y^2}{1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Вариант № 3

1. Вычислите пределы:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \dots + \frac{1}{5^n}}{1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{49} + \frac{1}{343} + \dots + \frac{1}{7^n}};$$

$$b) \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x) - \sin(a-x)}{\operatorname{tg}(a+x) - \operatorname{tg}(a-x)};$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 7}{x^2 + 8} \right)^{x^2 + 9};$$

$$d) \lim_{n \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3-x} - 1}{x^2 - 2x};$$

$$e) \lim_{n \rightarrow -1} \frac{\log_3(x+2)}{\operatorname{arctg}(x+1)}.$$

2. Исследуйте функцию на непрерывность, установите характер точек разрыва и постройте график.

$$f(x) = \begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}(3-x) & \text{при } x < 0, \\ -2 & \text{при } x = 0, \\ x-1 & \text{при } 0 < x \leq 4, \\ 2\sqrt{x} & \text{при } 4 < x \leq 5, \\ \frac{1}{x+5} & \text{при } x > 5. \end{cases}$$

3. Найти (описать, изобразить) область определения данной функции

$$z = \log_3(x^2 + y^2 - 1) + \sqrt{16 - x^2 - y^2}.$$

4. Вычислить предел.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{\sqrt{x^2 + (y-2)^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2 - 4y + 4}.$$

Вариант № 4

1. Вычислите пределы:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(5n+4)}{n^4 + 4n^2 - 7};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x \operatorname{tg} 2x};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\ln(x+2)}{x^3 + x^2 - x - 1};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x)^2 - 1};$$

$$e) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 5}{x^2 - 1} \right)^{x^2}.$$

2. Исследуйте функцию на непрерывность, установите характер точек разрыва и постройте график.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{при } x < 0, \\ (x - 1)^2 & \text{при } 0 \leq x \leq 2, \\ 4 - x & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

3. Найти (описать, изобразить) область определения данной функции

$$z = \arccos \frac{x + y}{x^2 + y^2}.$$

4. Вычислить предел.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow 5}} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}.$$

Вариант № 5

1. Вычислите пределы:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n + 2^{n+5}}{n - 3} \right);$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} x(\ln(x + a) - \ln x);$

c) $\lim_{n \rightarrow \pi} \frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{(x - \pi)^3};$

d) $\lim_{n \rightarrow -5} \frac{\sqrt[5]{6 + x} - 1}{e^x - \frac{1}{e^5}};$

e) $\lim_{n \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\arcsin x}}.$

2. Исследуйте функцию на непрерывность, установите характер точек разрыва и постройте график.

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} & \text{при } x \leq -\frac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x & \text{при } -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}, \\ \cos x & \text{при } x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

3. Найти (описать, изобразить) область определения данной функции

$$z = \sqrt{1 + y - x^2} - \sqrt{1 - y - x^2}.$$

4. Вычислить предел.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x + y^2) \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{y} \right).$$

Вариант № 6

1. Вычислите пределы:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 13n}{n^2 + 1} \right)^{n^2 - 1}; & \text{b)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^3 x - 1}{x^2}; \\
 \text{c)} \quad \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{x-4} - 2}{x-8}; & \text{d)} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x - x^2}{x-2}; \\
 \text{e)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_3(1+x)}{\sqrt[2]{1+x} - 1}.
 \end{array}$$

2. Исследуйте функцию на непрерывность, установите характер точек разрыва и постройте график.

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{при } x \leq -1, \\ 1 & \text{при } -1 < x \leq 0, \\ \frac{1}{x-1} & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

3. Найти (описать, изобразить) область определения данной функции

$$z = \arcsin \frac{x}{y}.$$

4. Вычислить предел.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{\arcsin x^2 y}{xy^2}.$$

Вариант № 7

1. Вычислите пределы:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6n}{7n-2} + \frac{2}{n} \cos n \right); & \text{b)} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x-b} - \sqrt{a-b}}{x^2 - a^2} \quad (a > b \geq 0); \\
 \text{c)} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{6} - \cos x}; & \text{d)} \quad \lim_{n \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{x})^{2x}; \quad \text{e)} \quad \lim_{x \rightarrow -6} \frac{e^x - \frac{1}{e^6}}{\sqrt[5]{7+x} - 1}.
 \end{array}$$

2. Исследуйте функцию на непрерывность, установите характер точек разрыва и постройте график.

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{при } x \leq -1, \\ 1 & \text{при } -1 < x \leq 0, \\ \frac{1}{x-1} & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

3. Найти (описать, изобразить) область определения данной функции

$$z = \sqrt{\frac{x^2 + 2x + y^2}{x^2 - 2x + y^2}}.$$

4. Вычислить предел.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x^2 + y^2 + 3(x^4 + y^4)}{7(x^4 + y^4)}.$$

Вариант № 8

1. Вычислите пределы:

a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{1 - \operatorname{tg} x};$

b) $\lim_{\pi \rightarrow 1} (1 + \sin \pi x)^{\operatorname{ctg} \pi x};$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \sqrt{x^2 + 5x - 8} \right);$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-6x^2} - 1}{x^2};$

e) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\log_5(x - 2)}{\arcsin(x - 3)}.$

2. Исследуйте функцию на непрерывность, установите характер точек разрыва и постройте график.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{при } x < 0, \\ x & \text{при } 0 \leq x \leq 2, \\ 3 & \text{при } 2 < x \leq 5, \\ 2x - 7 & \text{при } x > 5. \end{cases}$$

3. Найти (описать, изобразить) область определения данной функции

$$z = \sqrt{\cos(x^2 + y^2)}.$$

4. Вычислить предел.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow -1}} \frac{e^{\sin xy} - 1}{2x(x^2 + y^2)}.$$

Вариант № 9

1. Вычислите пределы:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!}$ ($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$); b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - \sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}};$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right);$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 - 1}{x^3 + 1} \right)^{x^3};$

e) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\operatorname{arctg}(x - 3)}{e^{5x} - e^{15}} = 0.$

2. Исследуйте функцию на непрерывность, установите характер точек разрыва и постройте график.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+3} & \text{при } x < 1, \\ x^3 + 2 & \text{при } x \geq 1. \end{cases}$$

3. Найти (описать, изобразить) область определения данной функции $u = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$.

4. Вычислить предел.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{e^{x^2+y^2} - 1}{x^2 + y^2}.$$

Вариант № 10

1. Вычислите пределы:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x^2} - 2}{x};$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-3}{2x+1} \right)^{\frac{z+1}{3}};$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \arcsin x}{2x - x^2};$ d) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2^x - 2^{\frac{\pi}{2}}}{\cos 3x - \cos 5x};$ e) $\lim_{x \rightarrow -12} \frac{\ln(x+13)}{(13+x)^5 - 1}.$

2. Исследуйте функцию на непрерывность, установите характер точек разрыва и постройте график.

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{при } x \leq 0, \\ 1-x & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ \frac{1}{1-x} & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

3. Найти (описать, изобразить) область определения данной функции

$$u = \arccos \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}.$$

4. Вычислить предел.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (1 + 3x^2 + 2y^2)^{\frac{2+x^2-y^2}{3x^2+2y^2}}.$$

Вариант № 11

1. Вычислите пределы:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (1 + 2 + 3 + \dots + n);$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-1} - \sqrt{3x-2}}{\cos \frac{\pi x}{2}};$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3}{x^2 - 3} \right)^{x^2}; \quad d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2}; \quad e) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3^x - \frac{1}{3^2}}{(3+x)^{15} - 1}.$$

2. Исследуйте функцию на непрерывность, установите характер точек разрыва и постройте график.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sin x} & \text{при } x < 0, \\ 2x - 1 & \text{при } 0 \leq x < 3, \\ x^2 + 1 & \text{при } x \geq 3. \end{cases}$$

3. Найти (описать, изобразить) область определения данной функции

$$z = \sqrt{y^2 - 1} + \sqrt{1 - x^2}.$$

4. Вычислить предел.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{5 \sin^3 x - \sin y^2}{\sqrt{25 + \sin y^2} - 5 \sin^3 x - 5}.$$

Вариант № 12

1. Вычислите пределы:

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2} \right); \quad b) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} \left(\cos \frac{x}{4} - \sin \frac{x}{4} \right)};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + mx)}{x}; \quad d) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{e^{2x-6} - 1}{8x - 9};$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -1} (1 + \arcsin 3(x+1))^{\frac{1}{\sin(x+1)}}.$$

2. Исследуйте функцию на непрерывность, установите характер точек разрыва и постройте график.

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & \text{при } x \leq -3, \\ -x^3 & \text{при } -3 < x \leq 0, \\ \arctg x & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

3. Найти (описать, изобразить) область определения данной функции

$$z = \sqrt{(x^2 + y^2 - 4)(9 - x^2 - y^2)}.$$

4. Вычислить предел.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(x^2 + y^2)x^2 y^2}{1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Вариант № 13

1. Вычислите пределы:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{2x \sin 5x}$;

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x-3} \right)^{3x-1}$;

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a+x) - \ln a}{x}$; d) $\lim_{y \rightarrow 5} \frac{\sqrt{y+4} - 3}{1 - \sqrt{y-4}}$; e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{1-x} - e^{4-4x}}{\sin x - \sin 1}$.

2. Исследуйте функцию на непрерывность, установите характер точек разрыва и постройте график.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2-x} & \text{при } x < 2, \\ 2 & \text{при } x = 2, \\ (x-2)^2 & \text{при } 2 < x \leq 3, \\ \frac{1}{(x-3)^2} & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

3. Найти (описать, изобразить) область определения данной функции

$$z = \log_3(x^2 + y^2 - 1) + \sqrt{16 - x^2 - y^2}.$$

4. Вычислить предел.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{\sqrt{x^2 + (y-2)^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2 - 4y + 4}.$$

Вариант № 14

1. Вычислите пределы:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1000n^3 + 3n^2}{0,001n^4 - 100n^3 + 2}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0,5} \frac{\sqrt{4x-1} - 1}{2x^2 - 11x + 5}$; d) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{x} \right)^{\frac{1}{7x}}$;

c) $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha^n)}{(\sin \alpha)^m}$ (n, m – натуральные числа); e) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \cos \frac{\pi}{4}}{\sqrt[15]{\frac{\pi+4}{4} - x} - 1}$.

2. Исследуйте функцию на непрерывность, установите характер точек разрыва и постройте график.

$$f(x) = \begin{cases} 1-3x & \text{при } x < -1, \\ 3,75 - \frac{1}{4x} & \text{при } -1 \leq x \leq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ \operatorname{ctg} x & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

3. Найти (описать, изобразить) область определения данной функции

$$z = \arccos \frac{x+y}{x^2+y^2}.$$

4. Вычислить предел.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow 5}} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}.$$

Вариант № 15

1. Вычислите пределы:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \arcsin x}{2x + \arctg x};$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^x;$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(3-x)}{\sin x - \sin 2};$

d) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{e^x - e^{\frac{\pi}{3}}}{\sqrt[16]{\frac{\pi+3}{3} - x} - 1};$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+1+n}\right)}{\sqrt[3]{n^8+1}}.$

2. Исследуйте функцию на непрерывность, установите характер точек разрыва и постройте график.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 5 & \text{при } x < 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ -x^2 + 5 & \text{при } 0 < x \leq \sqrt{5}, \\ \frac{1}{\sqrt{5-x}} & \text{при } x > \sqrt{5}. \end{cases}$$

3. Найти (описать, изобразить) область определения данной функции

$$z = \sqrt{1+y-x^2} - \sqrt{1-y-x^2}.$$

4. Вычислить предел.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x+y^2) \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{y}\right).$$

Вариант № 16

1. Вычислите пределы:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2};$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sin \ln(1+n) - \sin \ln n);$

c) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos^3 x}{\sin^2 x};$

d) $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+\alpha} - \sqrt{x}}{3\alpha};$ e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\log_3(x-1)}{e^{2x} - e^4}.$

2. Исследуйте функцию на непрерывность, установите характер точек разрыва и постройте график.

$$f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{при } x < 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ \frac{1}{x+1} & \text{при } 0 < x \leq 5, \\ 6x-5 & \text{при } x > 5. \end{cases}$$

3. Найти (описать, изобразить) область определения данной функции

$$z = \arcsin \frac{x}{y}.$$

4. Вычислить предел.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{\arcsin x^2 y}{xy^2}.$$

Вариант № 17

1. Вычислите пределы:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{a}{\sqrt{n}} \right)^n;$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right);$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+3x}{1-5x} \right)^{\frac{1}{2x}};$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{5x^2 - 1};$

e) $\lim_{t \rightarrow 2} \frac{\log_2(2t-3)}{\operatorname{arctg}(t-2)}.$

2. Исследуйте функцию на непрерывность, установите характер точек разрыва и постройте график.

$$f(x) = \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(1-x) & \text{при } x < 1, \\ 1-x & \text{при } 1 \leq x \leq 3, \\ x^2-11 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

3. Найти (описать, изобразить) область определения данной функции

$$z = \sqrt{\cos(x^2 + y^2)}.$$

4. Вычислить предел.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x^2 + y^2 + 3(x^4 + y^4)}{7(x^4 + y^4)}.$$

Вариант № 18

1. Вычислите пределы:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + 2 + \dots + n}{n + 2} - \frac{n}{2} \right);$$

$$b) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(\pi - x)^3}{\operatorname{tg} x - \sin x};$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}}.$$

2. Исследуйте функцию на непрерывность, установите характер точек разрыва и постройте график.

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x & \text{при } x < 0, \\ 1 & \text{при } x = 0, \\ \operatorname{arcsin} x & \text{при } 0 < x < 1, \\ 1 - x & \text{при } x \geq 1. \end{cases}$$

3. Найти (описать, изобразить) область определения данной функции

$$z = \sqrt{\frac{x^2 + 2x + y^2}{x^2 - 2x + y^2}}.$$

4. Вычислить предел.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow -1}} \frac{e^{\sin xy} - 1}{2x(x^2 + y^2)}.$$

Вариант № 19

1. Вычислите пределы:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\cos \frac{1}{n} - 1 \right);$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 - x} - 2}{x};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{3x}}{x^2 - 7x};$$

$$e) \lim_{\alpha \rightarrow 2} \frac{\log_3(\alpha - 1)}{\alpha - 2}.$$

2. Исследуйте функцию на непрерывность, установите характер точек разрыва и постройте график.

$$f(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{при } x \leq 5, \\ \log_2(x + 5) & \text{при } 5 < x < 7, \\ 7 & \text{при } x = 7, \\ \frac{1}{x - 6} & \text{при } x > 7. \end{cases}$$

3. Найти (описать, изобразить) область определения данной функции

$$u = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}.$$

4. Вычислить предел.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{e^{x^2+y^2} - 1}{x^2 + y^2}.$$

Вариант № 20

1. Вычислите пределы:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^2 \ln \cos \frac{\pi}{n} \right);$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1 - \sqrt{x-4}}{\sqrt{x+4} - 3};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x \cos 2x}{\operatorname{tg} 4x};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{3x+5} \right)^{x-2};$$

$$e) \lim_{z \rightarrow 3} \frac{3^z - 27}{\arcsin(z-3)}.$$

2. Исследуйте функцию на непрерывность, установите характер точек разрыва и постройте график.

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{ctgx} & \text{при} & x < 0, \\ \operatorname{tg} x & \text{при} & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \\ 2x - \frac{\pi}{2} & \text{при} & x > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

3. Найти (описать, изобразить) область определения данной функции

$$u = \arccos \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}.$$

4. Вычислить предел.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (1 + 3x^2 + 2y^2)^{\frac{2+x^2-y^2}{3x^2+2y^2}}.$$

Вариант № 21

1. Вычислите пределы:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{1 + \cos x};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^2};$$

$$d) \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt[t]{1 + 2t};$$

$$e) \lim_{z \rightarrow 2} \frac{\log_3(z-1)}{z-2}.$$

2. Исследуйте функцию на непрерывность, установите характер точек разрыва и постройте график.

$$f(x) = \begin{cases} 7 - x^2 & \text{при } x < -1, \\ 3x + 9 & \text{при } -1 \leq x \leq 0, \\ \log_2(x + 2) & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

3. Найти (описать, изобразить) область определения данной функции

$$z = \sqrt{y^2 - 1} + \sqrt{1 - x^2}.$$

4. Вычислить предел.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{5 \sin^3 x - \sin y^2}{\sqrt{25 + \sin y^2} - 5 \sin^3 x - 5}.$$

Вариант № 22.

1. Вычислите пределы:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{n+1} - \sin \sqrt{n});$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\cos 2x};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2 + x + 2x^3 + x^4}{x^3 + 2x^2 - x - 2};$$

$$d) \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t^2 - 4}{t^2 + 3} \right)^{t^2};$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3^x - 9}{(x - 1)^7 - 1}.$$

2. Исследуйте функцию на непрерывность, установите характер точек разрыва и постройте график.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } x < 0, \\ 2 & \text{при } x = 0, \\ -\sin x & \text{при } 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{tg} x & \text{при } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

3. Найти (описать, изобразить) область определения данной функции

$$z = \sqrt{(x^2 + y^2 - 4)(9 - x^2 - y^2)}.$$

4. Вычислить предел.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(x^2 + y^2)x^2y^2}{1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Вариант № 23

1. Вычислите пределы:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n+1} \right)^{n+1}; \quad b) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{1 - \operatorname{ctg} x}; \quad c) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1 - \sqrt{x}} - \frac{1}{1 - \sqrt[3]{x}} \right);$$
$$d) \lim_{t \rightarrow -1} \frac{e^{t+1} - e^{3+3t}}{\sqrt[5]{2+t} - 1}; \quad e) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{arctg} 7x)^{\frac{1}{x^2 - 2x}}.$$

2. Исследуйте функцию на непрерывность, установите характер точек разрыва и постройте график.

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{при } x < -2, \\ 2 & \text{при } x = 2, \\ 1 & \text{при } |x| < 2, \\ x^3 - 7 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

3. Найти (описать, изобразить) область определения данной функции

$$z = \log_3(x^2 + y^2 - 1) + \sqrt{16 - x^2 - y^2}.$$

4. Вычислить предел.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{\sqrt{x^2 + (y-2)^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2 - 4y + 4}.$$

Вариант № 24

1. Вычислите пределы:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{n} \right); \quad b) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right)}{1 - 2 \cos x}; \quad c) \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x^2}{7} \right)^{\frac{1}{x \operatorname{arctg} x}};$$
$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + x - 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} \right); \quad e) \lim_{x \rightarrow b} \frac{7^x - 7^b}{x - b}.$$

2. Исследуйте функцию на непрерывность, установите характер точек разрыва и постройте график.

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x & \text{при } x < 0, \\ \operatorname{tg} x & \text{при } 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ \sin x & \text{при } x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

3. Найти (описать, изобразить) область определения данной функции

$$z = \arccos \frac{x+y}{x^2+y^2}.$$

4. Вычислить предел.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow 5}} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}.$$

Вариант № 25

1. Вычислите пределы:

$$a) \lim_{y \rightarrow a} \left(\sin \frac{y-a}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi y}{2a} \right);$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\operatorname{arctg} x};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x + 2} \right)^x;$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1};$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(x-2)}{\cos x - \cos 3}.$$

2. Исследуйте функцию на непрерывность, установите характер точек разрыва и постройте график:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{при } x < 0, \\ x & \text{при } 0 \leq x < 2, \\ 2 & \text{при } 2 \leq x < 5, \\ \sin(x-5) & \text{при } x > 5. \end{cases}$$

3. Найти (описать, изобразить) область определения данной функции

$$z = \sqrt{y^2 - 1} + \sqrt{1 - x^2}.$$

4. Вычислить предел.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{5 \sin^3 x - \sin y^2}{\sqrt{25 + \sin y^2} - 5 \sin^3 x - 5}.$$